Нестандардне трансформације на паровима и n-торкама бројева

Задатак 1. *Назовимо* кораком *функцију која уређен пар природних бројева (x, y) коме је тачно једна координата парна пресликава у пар $(\frac{x}{2}, y+\frac{x}{2})$ ако $2 \mid x$, односно у пар $(x+\frac{y}{2}, \frac{y}{2})$ ако $2 \mid y$. Доказати да за сваки непаран природан број n, $n > 1$, постоји паран природан број b, $b < n$, такав да се сукцесивном применом коначно много корака од уређеног пара (n, b) добија уређен пар (b, n).*

Решење. Нека су дати природни бројеви x и y, и претпоставимо $2 \mid x$ и $2 \nmid y$. Како важи $y \equiv -x \pmod{x+y}$, имамо $(x, y) \equiv (x, -x) \pmod{x+y}$ и $(\frac{x}{2}, y+\frac{x}{2}) \equiv (\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}) \pmod{x+y}$; другим речима, дефинисан корак полови обе координате по модулу $x+y$ (што је константно). Дакле, ако се пар (b, n) добија после k корака од пара (n, b), закључујемо $(\frac{n}{2^k}, -\frac{n}{2^k}) \equiv (b, n) \equiv (-n, n) \pmod{m}$, за $m = n + b$. Ово се своди на $n(2^k+1) \equiv 0 \pmod{m}$.

Дакле, можемо узети $m = 2^k + 1$, тј. $b = 2^k + 1 - n$, где је k најмањи природан број такав да важи $2^k + 1 > n$. Како по дефиницији имамо $2^{k-1} + 1 \leqslant n$, следи $2^k + 1 < 2n$, тј. $b < n$, чиме је доказ завршен. $\square$

Задатак 2. *Одредити све природне бројеве n за које постоје ненегативни цели бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такви да важи*

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Решење. Претпоставимо да природан број n испуњава услове задатка, и нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ одговарајући ненегативни цели бројеви. Из услова

$$\frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1, \tag{1}$$

посматрањем по модулу 2, добијамо $1 + 2 + \cdots + n \equiv 1 \pmod 2$, тј. $\frac{n(n+1)}{2} \equiv 1 \pmod 2$. Приметимо, ако је n дељив са 4, или ако даје остатак 3 при дељењу са 4, тада је број $\frac{n(n+1)}{2}$ паран, што је у контрадикцији с добијеном конгруенцијом. Дакле, преостају могућности $n \equiv 1 \pmod 4$ или $n \equiv 2 \pmod 4$.

(Напоменимо, у горњем посматрању једнакости (1) по модулу 2, због разломака на левој страни имплицитно смо користили појам и особине модуларног инверза. За студенте који нису упознати с овим појмом, даћемо и алтернативни пут до истог закључка. Помножимо обе стране једнакости (1) са $3^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$. Тиме добијамо:

$$3^{\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\, i\neq 1} a_i} + 2\cdot 3^{\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\, i\neq 2} a_i} + \cdots + n \cdot 3^{\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\, i\neq n} a_i} = 3^{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

Сада видимо да се ова једнакост по модулу 2 поново своди на $1 + 2 + \cdots + n \equiv 1 \pmod 2$, па даље настављамо као малопре.)

Потребно је још доказати да за свако n које испуњава $n \equiv 1 \pmod 4$ или $n \equiv 2 \pmod 4$ постоје тражени $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За n-торку реалних бројева $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ рећи ћемо да је *фантастична* акко постоје ненегативни цели бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такви да важи

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{x_1}{3^{a_1}} + \frac{x_2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{x_n}{3^{a_n}} = 1.$$

Дакле, уз ову терминологију, треба показати да, уколико важи $n \equiv 1, 2 \pmod 4$, тада је n-торка $(1, 2, \ldots, n)$ фантастична. Доказ ћемо спровести индукцијом по n. Пре него што пређемо на доказ индукцијом, наводимо једно корисно запажање, које ћемо касније користити више пута: ако желимо да утврдимо да је n-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ фантастична, довољно је показати да је $(n-1)$-орка $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, \frac{x_{n-1}+x_n}{3})$ фантастична. Заиста, уколико је ова другонаведена $(n-1)$-орка фантастична, тада постоје ненегативни цели бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ такви да важи

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_{n-1}}} = \frac{x_1}{3^{a_1}} + \frac{x_2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{x_{n-2}}{3^{a_{n-2}}} + \frac{\frac{x_{n-1}+x_n}{3}}{3^{a_{n-1}}} = 1,$$

али ово се може записати и у облику

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_{n-2}}} + \frac{1}{2^{a_{n-1}+1}} + \frac{1}{2^{a_{n-1}+1}}& \\ = \frac{x_1}{3^{a_1}} + \frac{x_2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{x_{n-2}}{3^{a_{n-2}}} + \frac{x_{n-1}}{3^{a_{n-1}+1}} + \frac{x_n}{3^{a_{n-1}+1}} &= 1,\end{aligned}$$

одакле видимо да је и n-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ фантастична (њој одговарајући бројеви су $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}+1, a_{n-1}+1$).

Приметимо, у формулацији претходног помоћног запажања, није обавезно да два броја која замењујемо трећином њиховог збира буду баш *последња* два броја, него могу бити на произвољним местима (јер дефиниција фантастичне n-торке очито не зависи од поретка бројева). Даље, приметимо још да из горњег помоћног запажања специјално добијамо и следеће: уколико се у некој n-торци појављују бројеви x и $2x$, и уколико је $(n-1)$-орка добијена брисањем броја $2x$ фантастична, тада је и полазна n-торка фантастична (ово директно следи применом помоћног запажања на бројеве x и $2x$, с обзиром на $\frac{x+2x}{3} = x$).

Вратимо се сада доказу индукцијом. Као базу урадићемо случајеве $n = 1$ и $n = 5$ (видећемо током доказа да ће се сви преостали случајеви свести на неки од ова два, или на неки претходно урађени). За $n = 1$ тврђење је очигледно (треба показати да је једночлани низ који сачињава само број 1 фантастичан, што следи из $\frac{1}{2^0} = \frac{1}{3^0} = 1$, тј. можемо узети $a_1 = 0$). Узмимо сада $n = 5$. Посматрајмо следећи низ трансформација:

$$(1, 2, 3, 4, 5) \mapsto (1, 2, 3, 3) \mapsto (1, 2, 2) \mapsto (1, 2) \mapsto (1) \tag{2}$$

(у прва два корака смо заменили два последња броја трећином њиховог збира, а у наредна два смо „обрисали“ двојке, што представља, с обзиром на присуство броја 1, већ истакнут специјалан случај помоћног запажања). Применом помоћног запажања (више пута) добијамо да је петорка $(1, 2, 3, 4, 5)$ фантастична (наиме, како је једночлани низ добијен на крају фантастичан, то важи и за пар $(1, 2)$; сада, како је пар $(1, 2)$ фантастичан, то важи и за тројку $(1, 2, 2)$ итд. све до почетка).

Тиме је показана база индукције. Нека је сада задат природан број n, $n \equiv 1, 2 \pmod 4$, и претпоставимо да тврђење важи за све бројеве мање од n (наравно, који су притом конгруентни са 1 или 2 по модулу 4). Разматрамо два случаја.

- $n \equiv 2 \pmod 4$:

  Треба показати да је n-торка $(1, 2, \ldots, n)$ фантастична. Како је n паран број, и како се у овој n-торци појављује и број $\frac{n}{2}$, брисањем броја n из уочене n-торке добијамо $(1, 2, \ldots, n-1)$, а како је ова $(n-1)$-орка фантастична по индуктивној хипотези (приметимо и, $n - 1 \equiv 1 \pmod 4$), по помоћном запажању (прецизније, његовом истакнутом специјалном случају) следи да је и n-торка $(1, 2, \ldots, n)$ фантастична.

- $n \equiv 1 \pmod 4$:

  У овом случају можемо претпоставити $n \geqslant 9$ (мањи случајеви су показани засебно у бази индукције). И овде је идеја да сукцесивним трансформацијама које допушта помоћно запажање n-торку $(1, 2, \ldots, n)$ сведемо на нешто што јесте фантастично (и тада ће и полазна n-торка бити фантастична). Запишимо n-торку $(1, 2, \ldots, n)$ у облику

  $$(1, 2, \ldots, 6m-3, 6m-2, 6m-1, 6m, 6m+1, 6m+2, 6m+3, \ldots, n-1, n)$$

  за $m = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$. Како се у горњој n-торци појављује број $3m$, можемо одмах обрисати број $6m$. Даље, сваки пар бројева $6m - i, 6m + i$ можемо заменити бројем $4m$ (због $\frac{(6m-i)+(6m+i)}{3} = 4m$). Урадимо ово за све i, $1 \leqslant i \leqslant n - 6m$ (тј. за све бројеве од $6m + 1$ па до краја низа, уз њихове парове). Притом, потребно је проверити да ли за цео овај распон заиста оба броја која упарујемо постоје у посматраном низу, што конкретно значи, да ли за $i = n - 6m$ важи $6m - i \geqslant 1$ (ако ово покажемо за $i = n - 6m$, важиће, јасно, и за мање вредности i). Показаћемо чак јаче: $6m - (n - 6m) > 2m$ (касније ће нам требати баш ова јача неједнакост); и заиста, написана неједнакост је еквивалентна са $n < 10m$, а ово је тачно због $\frac{n}{6} < m + 1$ (према дефиницији функције $\lfloor \cdot \rfloor$), тј. $n < 6m + 6 < 10m$ за $m \geqslant 2$ (тј. $n \geqslant 13$), док за $n = 9$ директно имамо $m = 1$ и $9 = n < 10m = 10$. Дакле, коначно, када извршимо све ове замене, и при свакој таквој замени добијемо по једну копију броја $4m$, све ове добијене копије можемо обрисати будући да се у низу на крају и даље налази број $2m$ (на основу малопређашње неједнакости). Тиме нам после свега остаје низ бројева од 1 до $6m-(n-6m)-1$, тј. $(1, 2, \ldots, 12m-n-1)$. Како имамо $12m-n-1 < n$ (због $12m < 2n$) и $12m-n-1 \equiv -1-1 \equiv 2 \pmod 4$, на основу индуктивне хипотезе закључујемо да је низ добијен на крају фантастичан, па то важи и за n-торку од које смо кренули.

Тиме је задатак решен. $\square$

Пример. Показаћемо на примеру $n = 5$ (урађеном у бази индукције) на који начин процедура из решења доводи до вредности a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Како на крају (2) у низу имамо само јединицу, овај случај смо видели у бази за $n = 1$, и (подсетимо се) констатовали смо:

$$\frac{1}{2^0} = \frac{1}{3^0} = 1.$$

Сада, „брисање двојке“ у трансформацији $(1, 2) \mapsto (1)$ заправо представља замену пара $1, 2$ са $\frac{1+2}{3}$, па на основу доказа помоћног запажања долазимо до једнакости

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1} = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^1} = 1.$$

У кораку пре овог: $(1, 2, 2) \mapsto (1, 2)$, такође смо пар $1, 2$ заменили бројем 1, па долазимо до једнакости

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^1} = 1.$$

Даље, корак $(1, 2, 3, 3) \mapsto (1, 2, 2)$ (замена пара $3, 3$ бројем 2) доводи до једнакости

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} + \frac{3}{3^2} = 1.$$

И коначно, на основу корака $(1, 2, 3, 4, 5) \mapsto (1, 2, 3, 3)$ стижемо до једнакости

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^3} = 1.$$